

Transformations et homothétie

Notions, méthodes, exemples et erreurs à éviter pour maîtriser le programme de 3e et préparer le DNB.

En résumé

- Translation, rotation et symétries conservent **longueurs, angles et aires**.
- L'homothétie transforme une figure à partir d'un centre et d'un rapport k , positif ou négatif.
- Sous une homothétie : longueurs $\times |k|$, aires $\times k^2$, volumes $\times |k|^3$.
- Les transformations apparaissent dans les frises, pavages et rosaces et peuvent servir dans une démonstration.

1. Translation

Une translation déplace tous les points selon le même vecteur. Un segment et son image sont parallèles et de même longueur. Les angles, l'alignement, le parallélisme et les aires sont conservés.

2. Rotation

Une rotation est définie par un centre, un angle et un sens. Chaque point et son image sont à la même distance du centre. Une rotation conserve longueurs, angles, alignement et aires.

Une rotation de 180° correspond à une symétrie centrale.

3. Symétries

- **Symétrie axiale** : l'axe est la médiatrice du segment joignant un point et son image.
- **Symétrie centrale** : le centre est le milieu du segment joignant un point et son image.
- Ces deux transformations conservent longueurs, angles et aires.

4. Homothétie : centre et rapport

Dans une homothétie de centre O et de rapport k , les points O , M et M' sont alignés. La distance OM' vaut $|k| \times OM$.

Si $k > 0$, M et M' se trouvent du même côté de O . Si $k < 0$, ils sont situés de part et d'autre du centre. Si $|k| > 1$, la figure est agrandie ; si $0 < |k| < 1$, elle est réduite.

5. Effet sur longueurs, aires et volumes

- Longueur et périmètre : multiplication par $|k|$.
- Aire : multiplication par k^2 .
- Volume : multiplication par $|k|^3$.

- Angles : conservés.
- Une droite qui ne passe pas par le centre a pour image une droite parallèle.

Exemple : pour $k = -0,5$, une longueur de 8 cm devient 4 cm ; une aire de 20 cm² devient 5 cm² ; un volume de 64 cm³ devient 8 cm³. Le signe négatif change la position relative au centre, pas la valeur des longueurs.

6. Frises, pavages et rosaces

Identifier une transformation dans une frise ou une rosace revient à repérer ce qui reste invariant : distance au centre pour une rotation, direction et déplacement pour une translation, alignement avec un centre pour une homothétie.

Une construction peut combiner plusieurs transformations. Dans un programme de géométrie ou Scratch, une rotation répétée permet par exemple de reproduire un motif autour d'un centre.

7. Lien avec triangles semblables et Thalès

Une homothétie produit des figures semblables : les angles correspondants sont égaux et les longueurs correspondantes proportionnelles. Cette propriété explique le lien avec les configurations de Thalès.

Dans une démonstration, on doit préciser la transformation, ses données et les propriétés de conservation ou de proportionnalité utilisées.

Méthode

- Identifier la transformation à partir de la figure et des invariants.
- Pour une homothétie, repérer le centre et calculer le rapport.
- Vérifier le signe de k à partir de la position des points.
- Distinguer longueur, aire et volume avant d'appliquer $|k|$, k^2 ou $|k|^3$.
- Conclure par une propriété géométrique précise : parallélisme, égalité d'angles, proportion de longueurs.

Erreurs fréquentes

- Multiplier une aire par k au lieu de k^2 .
- Multiplier un volume par k^2 au lieu de $|k|^3$.
- Croire qu'une homothétie conserve les longueurs.
- Oublier qu'un rapport peut être négatif.
- Nommer une transformation sans donner son centre, son angle ou son rapport lorsqu'ils sont nécessaires.

Entraînement guidé

Situation : une figure d'aire 18 cm² et de volume 40 cm³ est transformée par une homothétie de rapport 1,5. L'aire devient $18 \times 1,5^2 = 40,5$ cm². Le volume devient $40 \times 1,5^3 = 135$ cm³. Les angles sont inchangés.

Conseil de révision : refaire les exemples sans regarder la correction, puis vérifier chaque étape et l'unité. Version en ligne : <https://sujets-corriges-brevet.fr/fiche-maths-transformations-homothetie>