

Divisibilité et nombres premiers

Notions, méthodes, exemples et erreurs à éviter pour maîtriser le programme de 3e et préparer le DNB.

En résumé

- Un entier **a divise b** lorsque $b=a \times k$ avec k entier.
- Un nombre premier possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- La décomposition en facteurs premiers facilite simplification et problèmes de divisibilité.
- Les problèmes de périodicité utilisent souvent un multiple commun ; les problèmes de partage un diviseur commun.

1. Multiples et diviseurs

42 est un multiple de 6 car $42=6 \times 7$; 6 est donc un diviseur de 42. Le vocabulaire « multiple de » et « diviseur de » doit être utilisé précisément.

2. Critères de divisibilité

- Par 2 : chiffre des unités pair.
- Par 3 : somme des chiffres multiple de 3.
- Par 5 : unité 0 ou 5.
- Par 9 : somme des chiffres multiple de 9.
- Par 10 : unité 0.

3. Nombres premiers

2, 3, 5, 7, 11, 13... sont premiers. 1 ne l'est pas. Pour tester un entier raisonnable, on examine les diviseurs premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée.

4. Décomposition en facteurs premiers

Exemple : $180=18 \times 10=2^2 \times 3^2 \times 5$. Une décomposition terminée ne contient plus que des facteurs premiers.

5. Simplifier une fraction

$84=2^2 \times 3 \times 7$ et $126=2 \times 3^2 \times 7$. Les facteurs communs donnent $84/126=2/3$.

6. Périodicité et partage

Deux événements périodiques qui doivent coïncider conduisent souvent à un PPCM. Pour former le plus grand nombre de groupes identiques sans reste, on cherche un diviseur commun pertinent.

Méthode : comment mobiliser cette notion

- Traduis le problème avec les mots « multiple » ou « diviseur ».
- Décompose les nombres si cela rend la structure visible.
- Justifie que le résultat répond à la contrainte.
- Simplifie tous les facteurs communs.
- Vérifie mentalement par produit ou division.

Erreurs fréquentes à éviter

- Dire que 1 est premier.
- S'arrêter à une décomposition avec un facteur composé.
- Confondre multiple commun et diviseur commun.
- Simplifier une fraction sans aller jusqu'à une forme irréductible.

Entraînement guidé

Deux signaux se déclenchent toutes les 18 s et 24 s. $\text{PPCM}(18,24)=72$: ils se retrouvent ensemble après 72 s.

Modéliser un problème de divisibilité

Les attendus de troisième demandent de savoir utiliser la divisibilité dans un problème, et pas seulement de décomposer un nombre. Les contextes classiques sont les phénomènes périodiques, les engrenages, les clignotements ou les partages en groupes identiques.

Lorsque deux phénomènes se répètent et doivent se produire de nouveau ensemble, on cherche un **multiple commun**. Lorsque l'on veut former le plus grand nombre de groupes identiques sans reste, on raisonne sur les **diviseurs communs**.

Exemple : deux signaux s'allument toutes les 153 s et 187 s et démarrent ensemble. On décompose les périodes ou on cherche leur plus petit multiple commun pour déterminer la prochaine coïncidence. La réponse doit ensuite être reconvertie en minutes et secondes ou en heure exacte.

Conseil de révision : refaire les exemples sans regarder la correction, puis vérifier chaque étape et l'unité. Version en ligne : <https://sujets-corriges-brevet.fr/fiche-maths-divisibilite-nombres-premiers>